Απ. 1

No.

Date 8/11/17

Λύση Άσκησης (Προηγούμενο μάθημα)

$(n!)^{1/n^2}$

$$n! = \underbrace{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}_{n\text{-πλήθ.}} \le \underbrace{n\cdot n \ldots n\cdot n}_{n\text{-φορές}} = n^n$$

υψώνω στην $\frac{1}{n^2}$

$$1 \le (n!)^{1/n^2} \le (n^n)^{1/n^2} = n^{\frac{n\cdot 1}{n^2}} = n^{1/n} = \sqrt[n]{n}$$

Άρα $1 \le (n!)^{1/n^2} \le \sqrt[n]{n}$

1

Άσκηση: ν.δ.ο. $\frac{n^2}{n!} \to 0$

Αρκεί να φράξω το $n!$ $\quad (n! \ge n \quad \forall n)$

$n \ge 5$

$$n! = n(n-1)(n-2)\underbrace{\ldots}_{\ge 1} 2\cdot 1 \ge n(n-1)(n-2) \quad \forall n \ge 5$$

$$\frac{n^2}{n!} \le \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{n}{(n-1)(n-2)} = \frac{n}{n^2(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}$$ (το όριο του κλάσματος τείνει στο 0)

Άρα από κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\frac{n^2}{n!} \to 0$

Άσκηση: ν.δ.ο. $\frac{2^n}{n!} \to 0$.

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)\cdot n \ge 2\,\underbrace{[3\ldots 3]}_{n-2\text{ φορές}} = 2\cdot 3^{n-2}$$

$|w|<1$

No. Date

$$0 \le \frac{2^n}{n!} \le \frac{2^n}{2\cdot 3^{n-2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{9}{2}$$

$$\frac{2^n}{n!} \to 0$$

Άσκηση: ν.δ.ο. $n^2 a^n \to 0$ αν $|a|<1$

Αν $a=0$, τότε προφανές

Για τη συνέχεια της άσκησης εφαρμόζω το πόρισμα

Κρ. Λόγου

Αν $a_n>0$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l<1$

$\to a_n \to 0$

• Πόρισμα: Αν $b_n \neq 0$ και $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \to l<1$

$\to b_n \to 0$

ο Για την απόδειξη παίρνω $a_n = |b_n|>0$ εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου

Υπόδειξη για την άσκηση

πε $a_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}}$$

Άσκηση: ν.δ.ο. $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right)$ δεν συγκλίνει

$b_n = a_{8n} = \sin\left(\frac{8n\pi}{8}\right) = \sin(n\pi) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$8n \in \mathbb{N}$ $\quad a_{8n} \to 0$

$k_n = 8n \uparrow$

$a_{16n+4} = \sin\left(\frac{16\pi n + 4\pi}{8}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Άρα η ακολουθία δεν συγκλίνει

No. Date

Παρατήρηση: Έστω (a_n) ακολουθία με $\lim a_n = a$

Έστω $\epsilon > 0$

$\rightarrow$ $\exists n_0$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$

$|a_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall m > n_0$

Άρα για $n, m \geq n_0$ έχω $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m|$

$\leq |a_n - a| + |a_m - a|$

$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Διαισθητικά τότε όλοι οι όροι μεγάλης τάξης είναι κοντά μεταξύ τους

Ορισμός

Θα λέμε ότι μια ακολουθία (a_n) είναι Cauchy (ή βασική) αν και μόνο αν $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a_m| < \epsilon$ $\forall n, m \geq n_0$

Σχόλιο: Φανερά ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον εξής: $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_{n+k} - a_n| < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$, $k \in \mathbb{N}$

Πρόταση: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy

Απόδειξη

Για την απόδειξη βλέπω πάνω από τον ορισμό Cauchy

Θεώρημα: Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει

Απόδειξη

Ισχυρισμός 1: Η (a_n) είναι φραγμένη (δηλ. $\exists \theta$ τ.ω. $|a_n| \leq \theta$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Έστω $\epsilon = 1$ στον ορισμό (a_n) Cauchy

$\rightsquigarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq n_1$

Θέτω $m = n_1 \rightsquigarrow |a_n - a_{n_1}| < 1 \quad \forall n \geq n_1$

$\rightsquigarrow |a_n| < |a_{n_1}| + 1 \quad \forall n \geq n_1$

Θέτω $\theta = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_1 - 1}|, |a_{n_1}| + 1\} \rightsquigarrow |a_n| \leq \theta \quad \forall n$

$\rightsquigarrow |a_n| \leq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ισχυρισμός 2: Υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n)

Αφού η (a_n) είναι φραγμένη (από ισχυρισμό 1), από B-W υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n)

Γράφουμε $\lim a_{k_n} = a$

Ισχυρισμός 3: $\exists$ το όριο της (a_n) και ισχύει $\lim a_n = a$

Έστω $\epsilon > 0$

Αφού $\lim a_{k_n} = a \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : |a_{k_n} - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_2$ (1)

Αφού η (a_n) είναι Cauchy $\Rightarrow \exists n_3 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_3$ (2)

Αφού $k_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ για $n \geq n_3 \rightsquigarrow k_n \geq n \geq n_3$

Εφαρμόζουμε την (2) για k_n στη θέση του m

$\rightsquigarrow |a_n - a_{k_n}| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_3$

Θέτω $n_0 = \max(n_2, n_1)$

Άρα για $n \geq n_0$ ισχύουν (1) και (2)

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Ανώτερα και κατώτερα όρια

Ορισμός: Έστω (a_n) ακολουθία γράφουμε $a_n \to +\infty$ αν και μόνο αν $\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M \quad \forall n \geq n_0$

Ανάλογα γράφουμε $a_n \to -\infty$ (ή $\lim a_n = -\infty$) αν και μόνο αν $\forall M>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n < -M$ $\forall n \geq n_0$

Παράδειγμα $\lim n^2 = +\infty$
Έστω $M>0$, παίρνω n_0 έναν φυσικό αριθμό τέτοιο ώστε $n_0 > \sqrt{M}$
Τότε για $n \geq n_0$ έχω $n^2 \geq n_0^2 > M$
$\leadsto$ $a_n = n^2 \to +\infty$

Ορισμός: Το εκτεταμένο σύστημα των πραγματικών αριθμών ορίζεται ως $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\lim a_n = l$ με $l \in \mathbb{R}$
$\lim a_n = +\infty$ με $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Ορισμός: Έστω (a_n) ακολουθία. Το $a \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n) αν και μόνο αν $\exists$ υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) τέτοιο ώστε $a_{k_n} \to a$.

Συμβολισμός: E = σύνολο των σημείων συσσώρευσης της (a_n)

Ορισμός: $a^* = \sup E$ ανώτερο όριο της a_n
$a_* = \inf E$ κατώτερο όριο της a_n

Γράφουμε $\limsup a_n = a^*$ $\liminf a_n = a_*$
π.χ. $a_n = (-1)^n$
$a_{2n} = 1 \to 1$
Άρα το 1 είναι σημείο συσσώρευσης
$a_{2n-1} = -1 \to -1$ Άρα το -1 είναι σημείο συσσώρευσης.

No. Date

$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ άρτιος} \\ -1, & n \text{ περιττός} \end{cases}$

Αν $a_{k_n} \to l \in \mathbb{R}$ ν.δ.ο $l=1$ ή $l=-1$ ← Άσκηση Για το σπίτι

$|a_{k_n}|=1$

Άσκηση: $(-1)^n \cdot n^2$: Να βρεθούν τα σημεία συσσωρ., τα limsup και liminf

Θεώρημα: a) Αν (a_n) μη φραγμένη και $\uparrow$ $\Rightarrow a_n \to +\infty$

b) Αν (a_n) μη φραγμένη και $\downarrow$ $\Rightarrow a_n \to -\infty$

Απόδειξη

a) Έστω $M>0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{n_0} > M$ (αν όχι, τότε $a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και επειδή $a_n \geq a_1$, θα είχαμε a_n φραγμένη που δεν ισχύει.

Αφού $a_n \uparrow$, έχουμε $a_n > M$ $\forall n \geq n_0$

δηλαδή $a_n \to +\infty$

Θεώρημα: Έστω a_n, b_n ακολουθίες τέτοιες ώστε $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(a) Εάν $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$

(b) Εάν $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

Απόδειξη

(a) Έστω $M>0$. Αφού $a_n \to +\infty$, $\exists n_0$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ $\forall n \geq n_0$

$\rightsquigarrow b_n \geq a_n > M$ $\forall n \geq n_0$

(b) ομοίως ...

Θεώρημα: Έστω a_n, b_n ακολουθίες με $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε $\frac{a_n}{b_n} \to \lambda > 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

Τότε $a_n \to +\infty \Leftrightarrow b_n \to +\infty$

Απόδειξη

$\frac{a_n}{b_n} \to l > 0$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2}$

Άρα $\frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3l b_n}{2}$, $n \geq n_0$

Αν $b_n \to +\infty$, από $a_n > \frac{l}{2} b_n$, $n \geq n_0$ $\Rightarrow a_n \to +\infty$

Παράδειγμα: Εάν $c > 1$, τότε $c^n \to +\infty$

θέτω $c = 1 + b$ με $b > 0$ $(b = c - 1 > 0)$

$c^n = (1+b)^n \geq 1 + nb > nb \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Αφού $nb \to +\infty \rightsquigarrow c^n \to +\infty)$

[Άσκηση: Ν.δ.ο. $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ (Με τα Μ)]

2ος τρόπος: Έστω $M > 0$

Επιλέγω n_0 έναν φυσικό αριθμό τέτοιο ώστε $n_0 > \frac{M}{b}$

$\rightsquigarrow c^n > nb \geq n_0 b > \frac{M}{b} b =$ $\quad \forall n \geq n_0$

Για σπίτι Άσκηση: ν.δ.ο. $\sqrt{n^2+2} \to +\infty$